Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2022»
Заключительный тур
13 марта 2022 года
11 класс

$\triangleright$ **1.** Линейная функция такова, что $f(1) = 20,22$, $f(2) = 2,022$. Имеется счётное устройство, на котором можно складывать или вычитать действительные числа. За каждое действие необходимо заплатить 1 рубль. Хватит ли Вам а) 100 рублей, б) 25 рублей, чтобы вычислить $f(2022)$, если устройство может оперировать лишь введёнными предварительно значениями $f(1)$ и $f(2)$ и теми значениями, которые получены в процессе предыдущих вычислений?

Решение: Покажем, что нам потребуется даже меньше 25 рублей, чтобы найти $f(2022)$. По условию, $f(x)$ – линейная функция, т.е. её можно представить в виде $f(x) = kx + b$, при этом $f(1) = k + b$, $f(2) = 2k + b$, тогда

$$b = 2f(1) - f(2) = f(1) + f(1) - f(2)$$

(на нахождение коэффициента b потребуется потратить 2 рубля). Введём функцию $g(x) = kx = f(x) - b$. Для неё верно соотношение

$$g(2x) = 2g(x) = g(x) + g(x).$$

Помня, что под умножением на 2 в нашей записи подразумевается одна операция сложения, можем получить:
$g(2) = f(2) - b$,
$g(4) = 2g(2)$,
$g(8) = 2g(4)$,
$g(16) = 2g(8)$,
...
$g(2048) = 2g(1024)$.
Всего 11 операций сложения и вычитания, т.е. потрачено 11 рублей.
Кроме того, для этой функции верно

$$g(x \pm y) = g(x) \pm g(y),$$

поэтому
$g(2032) = g(2048 - 16) = g(2048) - g(16)$
$g(2024) = g(2032) - g(8)$
$g(2022) = g(2024) - g(2)$
Таким образом, на вычисление значения $g(2022)$ у нас ушло 14 операций, а значит, пришлось потратить 14 рублей. Чтобы найти $f(2022)$, осталось совершить ещё одну операцию:

$$f(2022) = g(2022) + b.$$

Таким образом, если сложить все затраты, на вычисление потребуется 17 рублей.
В решении приведён лишь один пример подходящего числа операций; разумеется, возможны и другие.
Ответ: а) хватит; б) хватит.

$\triangleright$ **2.** Найдите по крайней мере два решения (две четвёрки натуральных чисел, каждое из которых больше, чем $2g+3\sqrt{g}$, где g – гугол ($g = 10^{100}$)) следующего уравнения:

$$x^2 + y^3 + z^5 = t^7.$$

Решение:
1 способ. Идея заключается в том, чтобы подобрать *какое-то* решение уравнения, после чего уножить равенство на достаточно большое число с тем, чтобы новые решения оказались больше заданного в условии значения.
Пусть $t = 2, x = 10$, тогда $100 + y^3 + z^5 = 128 \Rightarrow y^3 + z^5 = 28$. Нам подойдут значения $y = 3, z = 1$, т.к. $3^3 + 1^5 = 28$.
Теперь домножим обе части исходного равенства

$$10^2 + 3^3 + 1^5 = 2^7$$

на $k^{2\cdot3\cdot5\cdot7} = k^{210}$. Тогда

$$10^2 \cdot k^{2\cdot105} + 3^3 \cdot k^{3\cdot70} + 1^5 \cdot k^{5\cdot42} = 2^2 \cdot k^{7\cdot30},$$

т.е. числа $x = 10k^{105}, y = 3k^{70}, z = k^{42}, t = 2k^{30}$ также являются решениями исходного уравнения.
Нам необходимо, чтобы все они были больше, чем $2g+3\sqrt{g} = 2\cdot10^{100}+3\cdot10^{50}$, но поскольку множество натуральных чисел бесконечно, можно для удобства усилить оценку и взять, например, число 10^{101}. Достаточно оценить самое маленькое из наших чисел, так что необходимо выполнение условия:

$$2k^{30} > 10^{101}.$$

Нам подойдут, например, $k = 10^4, k = 10^5$.
Ответ: $(10^{421}; 3\cdot10^{280}; 10^{168}; 2\cdot10^{120}); (10^{526}; 3\cdot10^{350}; 10^{210}; 2\cdot10^{150})$.

2 способ. Заметим, что

$$3^a + 3^a + 3^a = 3^{a+1}.$$

Будем подбирать такую степень тройки, что

$$\begin{cases} x^2 = 3^a \\ y^3 = 3^a \\ z^5 = 3^a \\ t^7 = 3^{a+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^{\frac{a}{2}} \\ y = 3^{\frac{a}{3}} \\ z = 3^{\frac{a}{5}} \\ t = 3^{\frac{a+1}{7}} \end{cases}$$

Получаем, что a должно делиться на 2, 3 и 5, т.е. $a = 30k$, и $a+1$ делится на 7, т.е. $a+1 = 7n$.

$$30k = 7n - 1 \Rightarrow n = 4k + \frac{2k+1}{7}$$

$$2k+1 = 7m \Rightarrow k = 3m + \frac{m-1}{2} \Rightarrow m = 2p+1.$$

Окончательно получаем

$$k = 7p+3, a = 210p+90.$$

Теперь осталось найти такие a, при которых $3^{\frac{a+1}{7}} = 3^{30p+13} > 10^{101}$. Нам подойдут, например $a = 1560$ ($p = 7$) и $a = 1770$ ($p = 8$).

Ответ: $(3^{780}; 3^{520}; 3^{312}; 3^{223}); (3^{885}; 3^{590}; 3^{354}; 3^{253})$.

Примечание: Термин «гугол» не имеет серьёзного теоретического и практического значения. Американский математик Эдвард Казнер, предложивший его, хотел проиллюстрировать разницу между невообразимо большим числом и бесконечностью, и с этой целью термин иногда используется при обучении математике.

Гугол больше, чем количество атомов в известной нам части Вселенной, которых, по разным оценкам, насчитывается от 10^{79} до 10^{81}.

Название компании *Google* является искажённым написанием слова «гугол» (англ. googol).

▷ **3.** Определить все тройки действительных чисел (x, y, z), которые удовлетворяют **системе уравнений** : $2x + x^2y = y$, $2y + y^2z = z$, $2z + z^2x = x$.

Решение: Преобразуем систему к следующему виду:

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

Пусть $x = tg\alpha$, тогда по формула тангенса двойного угла $y = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = tg2\alpha$; аналогично $z = tg4\alpha$ и $x = tg8\alpha$.

$$\begin{cases} y = tg2\alpha \\ z = tg4\alpha \\ x = tg8\alpha \end{cases}$$

Получаем

$$tg8\alpha = tg\alpha \Rightarrow \frac{sin8\alpha}{cos8\alpha} - \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{sin8\alpha \cdot cos\alpha - cos8\alpha \cdot sin\alpha}{cos8\alpha \cdot cos\alpha} = \frac{sin7\alpha}{cos8\alpha \cdot cos\alpha} = 0$$

$$sin7\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

В силу периодичности тангенса найдется не более 7 различных решений исходной системы. Определим их, введя для удобства обозначения $a = tg\frac{\pi}{7}$, $b = tg\frac{2\pi}{7}$, $c = tg\frac{3\pi}{7}$ (здесь $a, b, c > 0$, поскольку все три угла лежат в первой четверти).

$$n = 0 \Rightarrow x = tg0, y = tg0, z = tg0 \Rightarrow (0; 0; 0)$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{\pi}{7}}_{a}, y = \underbrace{tg\frac{2\pi}{7}}_{b}, z = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c}, \Rightarrow (a; b; -c)$$

$$n = 2 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{2\pi}{7}}_{b}, y = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c}, z = \underbrace{tg\frac{8\pi}{7}}_{a}, \Rightarrow (b; -c; a)$$

$$n = 3 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{3\pi}{7}}_{c}, y = \underbrace{tg\frac{6\pi}{7}}_{-a}, z = \underbrace{tg\frac{12\pi}{7}}_{-b}, \Rightarrow (c; -a; -b)$$

$$n = 4 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c}, y = \underbrace{tg\frac{8\pi}{7}}_{a}, z = \underbrace{tg\frac{16\pi}{7}}_{b}, \Rightarrow (-c; a; b)$$

$$n = 5 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{5\pi}{7}}_{-b}, y = \underbrace{tg\frac{10\pi}{7}}_{c}, z = \underbrace{tg\frac{20\pi}{7}}_{-a}, \Rightarrow (-b; c; -a)$$

$$n = 6 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{6\pi}{7}}_{-a}, y = \underbrace{tg\frac{12\pi}{7}}_{-b}, z = \underbrace{tg\frac{24\pi}{7}}_{c}, \Rightarrow (-a; -b; c)$$

$$n = 7 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{7\pi}{7}}_{0}, y = \underbrace{tg\frac{14\pi}{7}}_{0}, z = \underbrace{tg\frac{28\pi}{7}}_{0}, \Rightarrow (0; 0; 0)$$

Ответ: $(0; 0; 0)$, $(tg\frac{\pi}{7}; tg\frac{2\pi}{7}; -tg\frac{3\pi}{7})$, $(tg\frac{2\pi}{7}; -tg\frac{3\pi}{7}; tg\frac{\pi}{7})$, $(tg\frac{3\pi}{7}; -tg\frac{\pi}{7}; -tg\frac{2\pi}{7})$, $(-tg\frac{3\pi}{7}; tg\frac{\pi}{7}; tg\frac{2\pi}{7})$, $(-tg\frac{2\pi}{7}; tg\frac{3\pi}{7}; -tg\frac{\pi}{7})$, $(-tg\frac{\pi}{7}; -tg\frac{2\pi}{7}; tg\frac{3\pi}{7})$.

▷ **4.** Робот все числа из множества натуральных чисел $\{111, 112, 113, ..., 997, 998, 999\}$ случайным образом записывает в виде многозначного числа. Какова вероятность того, что записанное число делится на 37?

Решение: Пусть данные трёхзначные числа (их всего 899) занумерованы в том порядке, в котором они стоят в полученном многозначном числе. Тогда его можно представить в виде

$$a_{889} + a_{888} \cdot 10^3 + a_{887} \cdot 10^6 + \cdots + a_3 \cdot 10^{2658} + a_2 \cdot 10^{2661} + a_1 \cdot 10^{2664} =$$

$= (a_1+a_2+\ldots+a_{889})+a_1(10^{2664}-1)+a_2(10^{2661}-1)+\cdots+a_{887}(10^6-1)+a_{888}(10^3-1).$

Но

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{889} = 111 + 112 + \ldots + 999 = \frac{111+999}{2} \cdot 889$$

делится на 37, так как 111 и 999 делятся на 37. Кроме того, при любом k число $10^{3k}-1$ делится на $10^3-1=999$, т.е. также делится на 37.
Ответ: Вероятность равна 1.

▷ **5.** На плоскости даны 22 каким-то образом расположенные различные прямые. Пусть t – число всех точек пересечения этих прямых, b – число частей, на которые прямые делятся точками их пересечения, а p – число частей, на которые плоскость делится данными прямыми. Пусть $A = t - b + p$. Какое наибольшее значение может принимать выражение A?

Решение: Докажем по индукции, что для любого расположения прямых на плоскости имеет место равенство

$$t - b + p = 1. \tag{1}$$

База индукции. Если на плоскости проведена одна прямая, то $t = 0$, $b = 1, p = 2$ и равенство (1) истинно.

Шаг индукции. Допустим, равенство (1) верно для n произвольно расположенных на плоскости прямых.
Проведем на плоскости $n+1$ прямую и выделим из этих прямых любые n; обозначим выделенные прямые $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Пусть $(n+1)$-ая прямая, которую мы означим через L_{n+1}, имеет k общих точек с выделенной совокупностью $L_1, L_2, \ldots, L_n$, и при этом m из них совпадают с уже имеющимися точками пересечения этой совокупности $(0 \leqslant m \leqslant k)$.

Для $L_1, L_2, ..., L_n$ имеет место равенство (1). После добавления к этой совокупности прямой L_{n+1} число точек пересечения всех $n+1$ прямых будет равно

$$t_1 = t + (k - m),$$

число частей, на которые прямые делятся точками их пересечения, будет равно

$$b_1 = b + k + 1 + (k - m) = b + 2k - m + 1,$$

т.к. прямая L_{n+1} делится на $k+1$ часть, и на тех прямых, где появились новые точки пересечения, появляется, соответственно, по одной новой части.
Число частей, на которые плоскость делится всеми прямыми, будет равно

$$p_1 = p + k + 1,$$

т.к. каждая из $k+1$ частей прямой L_{n+1} разбивает одну из уже имеющихся после проведения первых n прямых частей плоскости на две новые части.

Имеем:

$$t_1 - b_1 + p_1 = t + k - m - (b + 2k - m + 1) + p + k + 1 = t - b + p = 1,$$

т.е. равенство (1) выполняется для $n+1$ прямой, что и требовалось доказать.
Ответ: А = 1.
Примечание: Сходство полученной формулы с формулой Эйлера для графов (В – Р + Г = 2, где В – количество вершин, Р – количество рёбер, а Г – количество граней) не случайно: если представить, что все прямые на плоскости пересекаются в бесконечно удалённой точке и добавить её к уже имеющимся точкам пересечения, получится именно она.

▷ **6.** Пусть $[x]$ – целая часть x. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число натуральных решений уравнения $\left[\frac{x}{n+1}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ будет больше $l = 2\underbrace{00\cdots0}_{49}3\underbrace{00\cdots0}_{50}$.

Решение: Очевидно, что $\frac{x}{n+1} < \frac{x}{n}$ $\forall x > 0$. Чтобы выполнялось равенство $\left[\frac{x}{n+1}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$, необходимо, чтобы обе дроби принадлежали одному полуинтервалу $[k; k+1)$:

$$k \leqslant \frac{x}{n+1} < \frac{x}{n} < k + 1.$$

Получаем следующую оценку для значений x:

$$kn + k \leqslant x < kn + n,$$

откуда следует, во-первых, что $k < n$, и во-вторых, что количество натуральных решений этого неравенства равно $n - k$. Исключение составляет случай $k = 0$, при котором левая часть неравенства также будет строгой и количество решений будет равно $n - 1$, а не n.
Найдем общее количество решений исходного уравнения:

$$N = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n - 1 = \frac{(1+n)n}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{n^2+n-2}{2} > 2\underbrace{00\cdots0}_{49}3\underbrace{00\cdots0}_{50} = 2 \cdot 10^{100} + 3 \cdot 10^{50}.$$

$$n^2 + n - 2 > 4 \cdot 10^{100} + 6 \cdot 10^{50}$$

$$n^2 + n - 4 \cdot 10^{100} - 6 \cdot 10^{50} - 2 > 0$$

$$D = 1 + 16 \cdot 10^{100} + 24 \cdot 10^{50} + 8 = (4 \cdot 10^{50} + 3)^2$$

Решая неравенство с учётом того, что $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$n > \frac{-1+4\cdot 10^{50}+3}{2} = 2\cdot 10^{50}+1 = 2\underbrace{00\cdots0}_{49}1$$

Ответ: $n = 2\underbrace{00\cdots0}_{49}2$.

▷ **7.** При каком наименьшем натуральном m число непрерывных на отрезке $[0;\pi m]$ решений $y(x)$ уравнения $2y^2+\sin 2x = 2\sqrt{2}y\cos(x-\frac{\pi}{4})$ будет больше 2022?

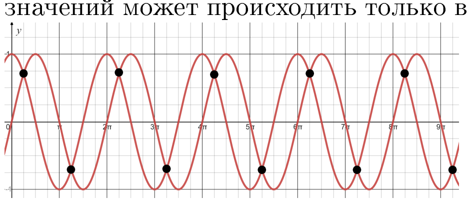
Решение: Преобразуем уравнение:

$$2y^2 - 2\sqrt{2}y(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) + 2\sin x\cos x = 0$$

$$y^2 - y(\cos x + \sin x) + \sin x\cos x = 0,$$

откуда по теореме Виета получаем $y=\sin x$, $y = \cos x$.

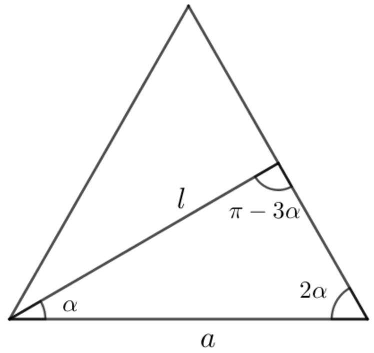
Заметим, что это – не единственные решения нашего уравнения. На самом деле, любая кусочно-аналитическая функция, принимающая на некоторой части вещественной прямой значения $\sin x$, а в остальных точках – $\cos x$, также будет ему удовлетворять. Если добавить условие непрерывности, то "смена" значений может происходить только в точках пересечения этих двух функций:



Для подсчёта количества непрерывных решений уравнения разобьём отрезок $[0;\pi m]$ на части точками $x = \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Любая подходящая нам функция на каждом из полученных m отрезков может быть равна $\sin x$ или $\cos x$, а значит, всего существует 2^m таких функций.
По условию $2^m > 2022$, т.е. наименьшее натуральное $m = 11$.
Ответ: 11.

▷ **8.** Пусть M – множество различных значений дроби $\frac{2022a}{l}$, где a – длина основания равнобедренного треугольника, а l – длина биссектрисы, проведённой к боковой стороне. Сколько элементов содержит пересечение $M\cap\mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел?

Решение: Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием a; обозначим угол при основании через 2α :



По теореме синусов

$$\frac{l}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(\pi-3\alpha)}.$$

$$\frac{a}{l} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot \sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \cos\alpha + \frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\cos\alpha} = 2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha}$$

Оценим, в каких пределах лежат значения этого выражения:

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha < 1$$

$$\sqrt{2} < 2\cos\alpha < 2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2\cos\alpha} < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha} < \frac{3}{2}.$$

Домножим все части полученного неравенства на 2022:

$$1011\sqrt{2} < 2022\frac{a}{l} < 3033,$$

т.е. множество M представляет собой интервал $\left(1001\sqrt{2}; 3033\right)$.
В задаче требуется найти количество натуральных чисел, принадлежащих этому множеству. Поскольку $1429 < 1011\sqrt{2} < 1430$, получаем

$$M\cap\mathbb{N} = \{1430, 1431, \ldots, 3032\},$$

и количество элементов этого пересечения равно $3032-1430+1 = 1603$.
Ответ: 1603.

▷ **9.** Бесконечная десятичная дробь с целой частью, равной 0, строится следующим образом: первые две цифры – a и b, а каждая следующая цифра является последней цифрой суммы двух предыдущих. Робот случайным образом выбирает пару цифр (a, b). Какова вероятность встречи в записи этой дроби комбинации а) 2021; б) 2022 ?

Решение: Проанализируем процесс построения этой дроби. Допустим, в какой-то момент две последовательные цифры в ней оказались равны 2 и 0. Тогда все последующие, являясь последними цифрами суммы предыдущих, также обязательно будут чётными, из чего следует, что число 2021 никогда не встретится. Таким образом, вероятность в пункте а) равна нулю. С другой стороны, если 2 и 0 действительно встретились рядом, то следующие цифры будут равны 2, 2 и никаких противоречий не возникает.

Определим, для каких исходных значений a и b возможно появление последовательных цифр 2 и 0. Заметим, что по любым двум последовательным цифрам дроби предыдущая цифра восстанавливается однозначно (на самом деле, если часть дроби имеет вид $\overline{...xcd...}$, то либо $x+c=d$, либо $x+c=10+d$, причем одновременно эти равенства выполняться не могут, поскольку $0 \leqslant x \leqslant 9$.) Инак, начав с цифр 2 и 0, будем определять предыдущие до тех пор, пока вернёмся к исходным цифрам (а это обязательно произойдет в силу конечности набора цифровых комбинаций). В итоге получим следующий повторяющийся "кусок":

$$...20224606628088640448 2022...$$

Если a и b равны любым двум последовательным цифрам этого ряда, то в записи дроби встретится число 2022; для других комбинаций цифр появление 2022 невозможно.

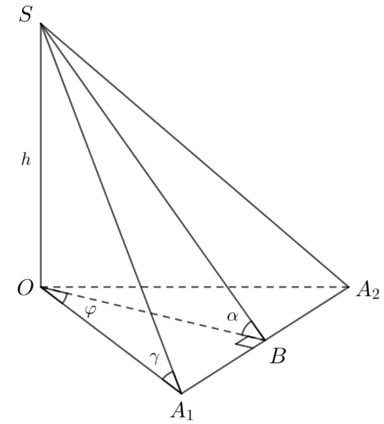
Таким образом, для определения вероятности этого события требуется количество "благоприятных" наборов (20, 02, 22, 24, 46, 60, 06, 66, 62, 28, 80, 08, 88, 86, 64, 40, 04, 44, 48, 82) разделить на все возможные комбинации из двух цифр, т.е.

$$\mathbb{P} = \frac{20}{100} = 0,2.$$

Ответ: а) 0; б) 0,2.

▷ **10.** В правильной 2022-угольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен γ. Какое наибольшее значение может принимать разность: $\cos 2\gamma - \cos 2\alpha$?

Решение: Обозначим исходную пирамиду $SA_1A_2\ldots A_{2022}$, и рассмотрим треугольную пирамиду SOA_1A_2, в которой SO – высота исходной пирамиды. Если B – середина стороны A_1A_2, то $\angle SBO = \alpha$, $\angle SA_1O = \gamma$. Поскольку речь идёт о соотношении углов, мы можем без ограничения общности считать, что $OA_1 = 1$. Обозначим для удобства $SO = h$, $\angle A_1OB = \frac{\pi}{2022} = \varphi$, тогда $A_1B = \sin\varphi$, $OB = \cos\varphi$.



Выражение, значение которого необходимо оценить, представим в виде:

$$\cos 2\gamma - \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\gamma - 1 + 2\sin^2\alpha = 2(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma).$$

Из треугольника SOB :

$$tg\alpha = \frac{SO}{OB} = \frac{h}{\cos\varphi} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{h^2}{h^2+\cos^2\varphi}.$$

Аналогично, из треугольника SOA_1 :

$$\sin^2\gamma = \frac{h^2}{h^2+1}$$

Тогда

$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = \frac{h^2}{h^2+\cos^2\varphi} - \frac{h^2}{h^2+1} = \frac{h^2\sin^2\varphi}{(h^2+\cos^2\varphi)(h^2+1)}.$$

Введём функцию $f(t)$, $t = h^2$, и исследуем её на экстремум:

$$f(t) = \frac{t\sin^2\varphi}{(t+\cos^2\varphi)(t+1)},$$

$$f'(t) = \frac{\sin^2\varphi\left(t^2+(1+\cos^2\varphi)t+cos^2\varphi\right) - t\sin^2\varphi\left(2t+1+\cos^2\varphi\right)}{(t+\cos^2\varphi)^2(t+1)^2} =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\left(\cos^2\varphi - t^2\right)}{(t+\cos^2\varphi)^2(t+1)^2} = 0.$$

Поскольку $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ – известные нам константы, это уравнение нетрудно решить относительно t и определить, что в точке $t = \cos\varphi$ функция достигает максимума. Найдём его:

$$f(\cos\varphi) = \frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\cos^2\varphi)(\cos\varphi+1)} = \frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+1)^2} = \frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1+1)^2} = tg^2\frac{\varphi}{2}$$

Возвращаясь к исходному выражению, получаем:

$$\max(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma) = tg^2\frac{\pi}{4044}$$

$$\max(\cos 2\gamma - \cos 2\alpha) = 2\max(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma) = 2tg^2\frac{\pi}{4044}.$$

Ответ: $2tg^2\frac{\pi}{4044}$

Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2022»
Заключительный тур
13 марта 2022 года
11 класс

▷ **1.** Линейная функция такова, что $f(1) = 20,22$, $f(2) = 2,022$. Имеется счётное устройство, на котором можно складывать или вычитать действительные числа. За каждое действие необходимо заплатить 1 рубль. Хватит ли Вам а) 100 рублей, б) 25 рублей, чтобы вычислить $f(2022)$, если устройство может оперировать лишь введёнными предварительно значениями $f(1)$ и $f(2)$ и теми значениями, которые получены в процессе предыдущих вычислений?

Решение: Покажем, что нам потребуется даже меньше 25 рублей, чтобы найти $f(2022)$. По условию, $f(x)$ – линейная функция, т.е. её можно представить в виде $f(x) = kx + b$, при этом $f(1) = k + b$, $f(2) = 2k + b$, тогда

$$b = 2f(1) - f(2) = f(1) + f(1) - f(2)$$

(на нахождение коэффициента b потребуется потратить 2 рубля). Введём функцию $g(x) = kx = f(x) - b$. Для неё верно соотношение

$$g(2x) = 2g(x) = g(x) + g(x).$$

Помня, что под умножением на 2 в нашей записи подразумевается одна операция сложения, можем получить:
$g(2) = f(2) - b$,
$g(4) = 2g(2)$,
$g(8) = 2g(4)$,
$g(16) = 2g(8)$,
...
$g(2048) = 2g(1024)$.
Всего 11 операций сложения и вычитания, т.е. потрачено 11 рублей.
Кроме того, для этой функции верно

$$g(x \pm y) = g(x) \pm g(y),$$

поэтому
$g(2032) = g(2048 - 16) = g(2048) - g(16)$
$g(2024) = g(2032) - g(8)$
$g(2022) = g(2024) - g(2)$
Таким образом, на вычисление значения $g(2022)$ у нас ушло 14 операций, а значит, пришлось потратить 14 рублей. Чтобы найти $f(2022)$, осталось совершить ещё одну операцию:

$$f(2022) = g(2022) + b.$$

Таким образом, если сложить все затраты, на вычисление потребуется 17 рублей.
В решении приведён лишь один пример подходящего числа операций; разумеется, возможны и другие.
Ответ: а) хватит; б) хватит.

▷ **2.** Найдите по крайней мере два решения (две четвёрки натуральных чисел, каждое из которых больше, чем $2g+3\sqrt{g}$, где g – гугол ($g = 10^{100}$)) следующего уравнения:

$$x^2 + y^3 + z^5 = t^7.$$

Решение:
1 способ. Идея заключается в том, чтобы подобрать *какое-то* решение уравнения, после чего уноможить равенство на достаточно большое число с тем, чтобы новые решения оказались больше заданного в условии значения.
Пусть $t = 2, x = 10$, тогда $100 + y^3 + z^5 = 128 \Rightarrow y^3 + z^5 = 28$. Нам подойдут значения $y = 3, z = 1$, т.к. $3^3 + 1^5 = 28$.
Теперь домножим обе части исходного равенства

$$10^2 + 3^3 + 1^5 = 2^7$$

на $k^{2\cdot3\cdot5\cdot7} = k^{210}$. Тогда

$$10^2 \cdot k^{2\cdot105} + 3^3 \cdot k^{3\cdot70} + 1^5 \cdot k^{5\cdot42} = 2^2 \cdot k^{7\cdot30},$$

т.е. числа $x = 10k^{105}, y = 3k^{70}, z = k^{42}, t = 2k^{30}$ также являются решениями исходного уравнения.
Нам необходимо, чтобы все они были больше, чем $2g+3\sqrt{g} = 2\cdot10^{100} + 3\cdot10^{50}$, но поскольку множество натуральных чисел бесконечно, можно для удобства усилить оценку и взять, например, число 10^{101}. Достаточно оценить самое маленькое из наших чисел, так что необходимо выполнение условия:

$$2k^{30} > 10^{101}.$$

Нам подойдут, например, $k = 10^4, k = 10^5$.
Ответ: $(10^{421}; 3\cdot10^{280}; 10^{168}; 2\cdot10^{120}); (10^{526}; 3\cdot10^{350}; 10^{210}; 2\cdot10^{150})$.
2 способ. Заметим, что

$$3^a + 3^a + 3^a = 3^{a+1}.$$

Будем подбирать такую степень тройки, что

$$\begin{cases} x^2 = 3^a \\ y^3 = 3^a \\ z^5 = 3^a \\ t^7 = 3^{a+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^{\frac{a}{2}} \\ y = 3^{\frac{a}{3}} \\ z = 3^{\frac{a}{5}} \\ t = 3^{\frac{a+1}{7}} \end{cases}$$

Получаем, что a должно делиться на 2, 3 и 5, т.е. $a = 30k$, и $a+1$ делится на 7, т.е. $a+1 = 7n$.

$$30k = 7n - 1 \Rightarrow n = 4k + \frac{2k+1}{7}$$

$$2k+1 = 7m \Rightarrow k = 3m + \frac{m-1}{2} \Rightarrow m = 2p+1.$$

Окончательно получаем

$$k = 7p+3, a = 210p+90.$$

Теперь осталось найти такие a, при которых $3^{\frac{a+1}{7}} = 3^{30p+13} > 10^{101}$. Нам подойдут, например $a = 1560$ ($p = 7$) и $a = 1770$ ($p = 8$).
Ответ: $(3^{780}; 3^{520}; 3^{312}; 3^{223}); (3^{885}; 3^{590}; 3^{354}; 3^{253})$.
Примечание: Термин «гугол» не имеет серьёзного теоретического и практического значения. Американский математик Эдвард Казнер, предложивший его, хотел проиллюстрировать разницу между невообразимо большим числом и бесконечностью, и с этой целью термин иногда используется при обучении математике.
Гугол больше, чем количество атомов в известной нам части Вселенной, которых, по разным оценкам, насчитывается от 10^{79} до 10^{81}.
Название компании *Google* является искажённым написанием слова «гугол» (англ. googol).

▷ **3.** Определить все тройки действительных чисел (x, y, z), которые удовлетворяют **системе уравнений** : $2x + x^2y = y$, $2y + y^2z = z$, $2z + z^2x = x$.

Решение: Преобразуем систему к следующему виду:

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

Пусть $x = tg\alpha$, тогда по формула тангенса двойного угла $y = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = tg2\alpha$; аналогично $z = tg4\alpha$ и $x = tg8\alpha$.

$$\begin{cases} y = tg2\alpha \\ z = tg4\alpha \\ x = tg8\alpha \end{cases}$$

Получаем

$$tg8\alpha = tg\alpha \Rightarrow \frac{sin8\alpha}{cos8\alpha} - \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{sin8\alpha\cdot cos\alpha - cos8\alpha\cdot sin\alpha}{cos8\alpha\cdot cos\alpha} = \frac{sin7\alpha}{cos8\alpha\cdot cos\alpha} = 0$$

$$sin7\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

В силу периодичности тангенса найдется не более 7 различных решений исходной системы. Определим их, введя для удобства обозначения $a = tg\frac{\pi}{7}$, $b = tg\frac{2\pi}{7}, c = tg\frac{3\pi}{7}$ (здесь $a, b, c > 0$, поскольку все три угла лежат в первой четверти).

$$n = 0 \Rightarrow x = tg0, y = tg0, z = tg0 \Rightarrow (0; 0; 0)$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{\pi}{7}}_{a}, y = \underbrace{tg\frac{2\pi}{7}}_{b}, z = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c}, \Rightarrow (a; b; -c)$$

$$n = 2 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{2\pi}{7}}_{b}, y = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c}, z = \underbrace{tg\frac{8\pi}{7}}_{a}, \Rightarrow (b; -c; a)$$

$$n = 3 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{3\pi}{7}}_{c}, y = \underbrace{tg\frac{6\pi}{7}}_{-a}, z = \underbrace{tg\frac{12\pi}{7}}_{-b}, \Rightarrow (c; -a; -b)$$

$$n = 4 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c}, y = \underbrace{tg\frac{8\pi}{7}}_{a}, z = \underbrace{tg\frac{16\pi}{7}}_{b}, \Rightarrow (-c; a; b)$$

$$n = 5 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{5\pi}{7}}_{-b}, y = \underbrace{tg\frac{10\pi}{7}}_{c}, z = \underbrace{tg\frac{20\pi}{7}}_{-a}, \Rightarrow (-b; c; -a)$$

$$n = 6 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{6\pi}{7}}_{-a}, y = \underbrace{tg\frac{12\pi}{7}}_{-b}, z = \underbrace{tg\frac{24\pi}{7}}_{c}, \Rightarrow (-a; -b; c)$$

$$n = 7 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{7\pi}{7}}_{0}, y = \underbrace{tg\frac{14\pi}{7}}_{0}, z = \underbrace{tg\frac{28\pi}{7}}_{0}, \Rightarrow (0; 0; 0)$$

Ответ: $(0; 0; 0)$, $(tg\frac{\pi}{7}; tg\frac{2\pi}{7}; -tg\frac{3\pi}{7})$, $(tg\frac{2\pi}{7}; -tg\frac{3\pi}{7}; tg\frac{\pi}{7})$, $(tg\frac{3\pi}{7}; -tg\frac{\pi}{7}; -tg\frac{2\pi}{7})$, $(-tg\frac{3\pi}{7}; tg\frac{\pi}{7}; tg\frac{2\pi}{7})$, $(-tg\frac{2\pi}{7}; tg\frac{3\pi}{7}; -tg\frac{\pi}{7})$, $(-tg\frac{\pi}{7}; -tg\frac{2\pi}{7}; tg\frac{3\pi}{7})$.

▷ **4.** Робот все числа из множества натуральных чисел $\{111, 112, 113, ..., 997, 998, 999\}$ случайным образом записывает в виде многозначного числа. Какова вероятность того, что записанное число делится на 37?

Решение: Пусть данные трёхзначные числа (их всего 899) занумерованы в том порядке, в котором они стоят в полученном многозначном числе. Тогда его можно представить в виде

$$a_{889} + a_{888} \cdot 10^3 + a_{887} \cdot 10^6 + \cdots + a_3 \cdot 10^{2658} + a_2 \cdot 10^{2661} + a_1 \cdot 10^{2664} =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_{889}) + a_1(10^{2664} - 1) + a_2(10^{2661} - 1) + \cdots + a_{887}(10^6 - 1) + a_{888}(10^3 - 1).$$

Но

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{889} = 111 + 112 + \ldots + 999 = \frac{111 + 999}{2} \cdot 889$$

делится на 37, так как 111 и 999 делятся на 37. Кроме того, при любом k число $10^{3k} - 1$ делится на $10^3 - 1 = 999$, т.е. также делится на 37.

Ответ: Вероятность равна 1.

▷ **5.** На плоскости даны 22 каким-то образом расположенные различные прямые. Пусть t – число всех точек пересечения этих прямых, b – число частей, на которые прямые делятся точками их пересечения, а p – число частей, на которые плоскость делится данными прямыми. Пусть $A = t - b + p$. Какое наибольшее значение может принимать выражение A?

Решение: Докажем по индукции, что для любого расположения прямых на плоскости имеет место равенство

$$t - b + p = 1. \tag{1}$$

База индукции. Если на плоскости проведена одна прямая, то $t = 0$, $b = 1, p = 2$ и равенство (1) истинно.

Шаг индукции. Допустим, равенство (1) верно для n произвольно расположенных на плоскости прямых.

Проведем на плоскости $n+1$ прямую и выделим из этих прямых любые n; обозначим выделенные прямые $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Пусть $(n+1)$-ая прямая, которую мы означим через L_{n+1}, имеет k общих точек с выделенной совокупностью $L_1, L_2, \ldots, L_n$, и при этом m из них совпадают с уже имеющимися точками пересечения этой совокупности $(0 \leqslant m \leqslant k)$.

Для $L_1, L_2, ..., L_n$ имеет место равенство (1). После добавления к этой совокупности прямой L_{n+1} число точек пересечения всех $n+1$ прямых будет равно

$$t_1 = t + (k - m),$$

число частей, на которые прямые делятся точками их пересечения, будет равно

$$b_1 = b + k + 1 + (k - m) = b + 2k - m + 1,$$

т.к. прямая L_{n+1} делится на $k+1$ часть, и на тех прямых, где появились новые точки пересечения, появляется, соответственно, по одной новой части.

Число частей, на которые плоскость делится всеми прямыми, будет равно

$$p_1 = p + k + 1,$$

т.к. каждая из $k+1$ частей прямой L_{n+1} разбивает одну из уже имеющихся после проведения первых n прямых частей плоскости на две новые части.

Имеем:

$$t_1 - b_1 + p_1 = t + k - m - (b + 2k - m + 1) + p + k + 1 = t - b + p = 1,$$

т.е. равенство (1) выполняется для $n+1$ прямой, что и требовалось доказать.
Ответ: А $= 1$.
Примечание: Сходство полученной формулы с формулой Эйлера для графов (В – Р + Г $= 2$, где В – количество вершин, Р – количество рёбер, а Г – количество граней) не случайно: если представить, что все прямые на плоскости пересекаются в бесконечно удалённой точке и добавить её к уже имеющимся точкам пересечения, получится именно она.

▷ **6.** Пусть $[x]$ – целая часть x. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число натуральных решений уравнения $\left[\frac{x}{n+1}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ будет больше $l = 2\underbrace{00\cdots0}_{49}3\underbrace{00\cdots0}_{50}$.

Решение: Очевидно, что $\frac{x}{n+1} < \frac{x}{n}$ $\forall x > 0$. Чтобы выполнялось равенство $\left[\frac{x}{n+1}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$, необходимо, чтобы обе дроби принадлежали одному полуинтервалу $[k; k+1)$:

$$k \leqslant \frac{x}{n+1} < \frac{x}{n} < k+1.$$

Получаем следующую оценку для значений x:

$$kn + k \leqslant x < kn + n,$$

откуда следует, во-первых, что $k < n$, и во-вторых, что количество натуральных решений этого неравенства равно $n - k$. Исключение составляет случай $k = 0$, при котором левая часть неравенства также будет строгой и количество решений будет равно $n - 1$, а не n.
Найдем общее количество решений исходного уравнения:

$$N = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n - 1 = \frac{(1+n)n}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{n^2+n-2}{2} > 2\underbrace{00\cdots0}_{49}3\underbrace{00\cdots0}_{50} = 2\cdot10^{100} + 3\cdot10^{50}.$$

$$n^2 + n - 2 > 4\cdot10^{100} + 6\cdot10^{50}$$

$$n^2 + n - 4\cdot10^{100} - 6\cdot10^{50} - 2 > 0$$

$$D = 1 + 16\cdot10^{100} + 24\cdot10^{50} + 8 = (4\cdot10^{50} + 3)^2$$

Решая неравенство с учётом того, что $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$n > \frac{-1 + 4\cdot10^{50} + 3}{2} = 2\cdot10^{50} + 1 = 2\underbrace{00\cdots0}_{49}1$$

Ответ: $n = 2\underbrace{00\cdots0}_{49}2$.

▷ **7.** При каком наименьшем натуральном m число непрерывных на отрезке $[0; \pi m]$ решений $y(x)$ уравнения $2y^2 + \sin 2x = 2\sqrt{2}y\cos(x - \frac{\pi}{4})$ будет больше 2022?

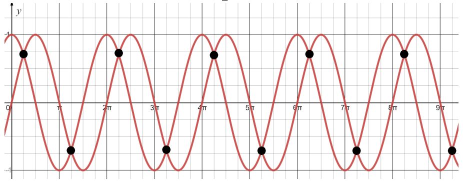
Решение: Преобразуем уравнение:

$$2y^2 - 2\sqrt{2}y(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) + 2\sin x\cos x = 0$$

$$y^2 - y(\cos x + \sin x) + \sin x\cos x = 0,$$

откуда по теореме Виета получаем $y = \sin x$, $y = \cos x$.

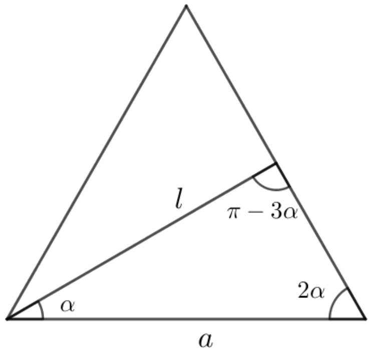
Заметим, что это – не единственные решения нашего уравнения. На самом деле, любая кусочно-аналитическая функция, принимающая на некоторой части вещественной прямой значения $\sin x$, а в остальных точках – $\cos x$, также будет ему удовлетворять. Если добавить условие непрерывности, то "смена" значений может происходить только в точках пересечения этих двух функций:



Для подсчёта количества непрерывных решений уравнения разобьём отрезок $[0; \pi m]$ на части точками $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Любая подходящая нам функция на каждом из полученных m отрезков может быть равна $\sin x$ или $\cos x$, а значит, всего существует 2^m таких функций.
По условию $2^m > 2022$, т.е. наименьшее натуральное $m = 11$.
Ответ: 11.

▷ **8.** Пусть M – множество различных значений дроби $\frac{2022a}{l}$, где a – длина основания равнобедренного треугольника, а l – длина биссектрисы, проведённой к боковой стороне. Сколько элементов содержит пересечение $M \cap \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел?

Решение: Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием a; обозначим угол при основании через 2α :



По теореме синусов

$$\frac{l}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(\pi - 3\alpha)}.$$

$$\frac{a}{l} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \cos\alpha + \frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\cos\alpha} = 2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha}$$

Оценим, в каких пределах лежат значения этого выражения:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha < 1$$

$$\sqrt{2} < 2\cos\alpha < 2, \ -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2\cos\alpha} < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha} < \frac{3}{2}.$$

Домножим все части полученного неравенства на 2022:

$$1011\sqrt{2} < 2022\frac{a}{l} < 3033,$$

т.е. множество M представляет собой интервал $\left(1001\sqrt{2}; 3033\right)$.
В задаче требуется найти количество натуральных чисел, принадлежащих этому множеству. Поскольку $1429 < 1011\sqrt{2} < 1430$, получаем

$$M \cap \mathbb{N} = \{1430, 1431, \ldots, 3032\},$$

и количество элементов этого пересечения равно $3032 - 1430 + 1 = 1603$.
Ответ: 1603.

▷ **9.** Бесконечная десятичная дробь с целой частью, равной 0, строится следующим образом: первые две цифры – a и b, а каждая следующая цифра является последней цифрой суммы двух предыдущих. Робот случайным образом выбирает пару цифр (a, b). Какова вероятность встречи в записи этой дроби комбинации а) 2021; б) 2022 ?

Решение: Проанализируем процесс построения этой дроби. Допустим, в какой-то момент две последовательные цифры в ней оказались равны 2 и 0. Тогда все последующие, являясь последними цифрами суммы предыдущих, также обязательно будут чётными, из чего следует, что число 2021 никогда не встретится. Таким образом, вероятность в пункте а) равна нулю. С другой стороны, если 2 и 0 действительно встретились рядом, то следующие цифры будут равны 2, 2 и никаких противоречий не возникает.

Определим, для каких исходных значений a и b возможно появление последовательных цифр 2 и 0. Заметим, что по любым двум последовательным цифрам дроби предыдущая цифра восстанавливается однозначно (на самом деле, если часть дроби имеет вид $\overline{...xcd...}$, то либо $x + c = d$, либо $x + c = 10 + d$, причем одновременно эти равенства выполняться не могут, поскольку $0 \leqslant x \leqslant 9$.) Инак, начав с цифр 2 и 0, будем определять предыдущие до тех пор, пока вернёмся к исходным цифрам (а это обязательно произойдет в силу конечности набора цифровых комбинаций). В итоге получим следующий повторяющийся "кусок":

$$...20224606628088640448 2022...$$

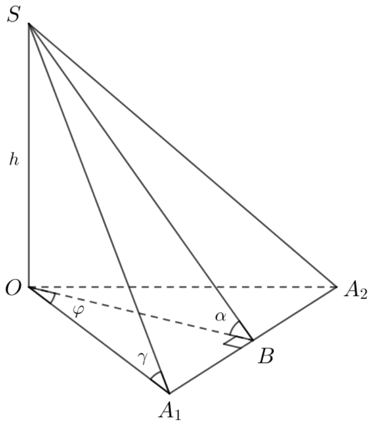
Если a и b равны любым двум последовательным цифрам этого ряда, то в записи дроби встретится число 2022; для других комбинаций цифр появление 2022 невозможно.
Таким образом, для определения вероятности этого события требуется количество "благоприятных" наборов (20, 02, 22, 24, 46, 60, 06, 66, 62, 28, 80, 08, 88, 86, 64, 40, 04, 44, 48, 82) разделить на все возможные комбинации из двух цифр, т.е.

$$\mathbb{P} = \frac{20}{100} = 0,2.$$

Ответ: а) 0; б) $0,2$.

▷ **10.** В правильной 2022-угольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен γ. Какое наибольшее значение может принимать разность: $\cos 2\gamma - \cos 2\alpha$?

Решение: Обозначим исходную пирамиду $SA_1A_2\ldots A_{2022}$, и рассмотрим треугольную пирамиду SOA_1A_2, в которой SO – высота исходной пирамиды. Если B – середина стороны A_1A_2, то $\angle SBO = \alpha$, $\angle SA_1O = \gamma$. Поскольку речь идёт о соотношении углов, мы можем без ограничения общности считать, что $OA_1 = 1$. Обозначим для удобства $SO = h$, $\angle A_1OB = \frac{\pi}{2022} = \varphi$, тогда $A_1B = \sin\varphi$, $OB = \cos\varphi$.



Выражение, значение которого необходимо оценить, представим в виде:

$$\cos 2\gamma - \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\gamma - 1 + 2\sin^2\alpha = 2(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma).$$

Из треугольника SOB :

$$tg\alpha = \frac{SO}{OB} = \frac{h}{\cos\varphi} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{h^2}{h^2+\cos^2\varphi}.$$

Аналогично, из треугольника SOA_1 :

$$\sin^2\gamma = \frac{h^2}{h^2+1}$$

Тогда

$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = \frac{h^2}{h^2+\cos^2\varphi} - \frac{h^2}{h^2+1} = \frac{h^2\sin^2\varphi}{(h^2+\cos^2\varphi)(h^2+1)}.$$

Введём функцию $f(t)$, $t = h^2$, и исследуем её на экстремум:

$$f(t) = \frac{t\sin^2\varphi}{(t+\cos^2\varphi)(t+1)},$$

$$f'(t) = \frac{\sin^2\varphi\left(t^2+(1+\cos^2\varphi)t+cos^2\varphi\right) - t\sin^2\varphi\left(2t+1+\cos^2\varphi\right)}{(t+\cos^2\varphi)^2(t+1)^2} =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\left(\cos^2\varphi - t^2\right)}{(t+\cos^2\varphi)^2(t+1)^2} = 0.$$

Поскольку $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ – известные нам константы, это уравнение нетрудно решить относительно t и определить, что в точке $t = \cos\varphi$ функция достигает максимума. Найдём его:

$$f(\cos\varphi) = \frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\cos^2\varphi)(\cos\varphi+1)} = \frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+1)^2} = \frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1+1)^2} = tg^2\frac{\varphi}{2}$$

Возвращаясь к исходному выражению, получаем:

$$\max(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma) = tg^2\frac{\pi}{4044}$$

$$\max(\cos 2\gamma - \cos 2\alpha) = 2\max(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma) = 2tg^2\frac{\pi}{4044}.$$

Ответ: $2tg^2\frac{\pi}{4044}$